ИЗСЛЕДВАНЕ И ОПТИМАЛНО УПРАВЛЕНИЕ НА ЗАПАСА ОТ РЕЗЕРВНИ ЧАСТИ В ЛОГИСТИЧНАТА СИСТЕМА

Светозар Маджов, Георги Тасев, Владислав Тодоров
Лесотехнически университет - София

Статията разглежда модел за оптимално управление на запаса от резервни части в логистичната система. Представеният модел отчита колебанията на необходимостта от резервни части. Моделът изследва зависимостта между броят на доставките през годината и сумарните разходи за закупуване и съхраняване на запасите от резервни части и определя оптималния брой на доставките.

Ключови думи: управление, резервни части, логистична система, брой доставки
Key words: management, spare parts, logistical system, number of deliveries

Снабдяването и управлението на запасите от резервни части (РЧ) за поддържане на работоспособността на машините в съвременните условия е важен фактор за подобряване на ефективността за използване на техниката. В този аспект разработване на модели за оптимално управление на запасите от РЧ в логистичната система е актуален проблем, проблем по който се работи [1, 2, 3, 4].

Важното при разработването на математически модели за управление на запасите от РЧ е да се отчете ситуацията, за която се разработва модела, т.е. да могат да се отчитат съществуващите фактори.

Представеният модел отчита колебанията на горскостопанското производство, т.е. фактът че натоварването на машините и съответно потребността от РЧ през годината е различна. При този модел резервните части се изразходват неравномерно и разходите за закупуване и попълване на запаса зависи от броя на частите.

Необходимо е да се определи оптималния брой на доставките, при което сумарните разходи за закупуване и съхранение на запаса са минимални.

Ако функцията на запаса от РЧ е $Q_m(t)$, то разхода на части Q за периода $[t_1;t_2]$ може да се изчисли по формулата:

(1) $$Q = \int_{t1}^{t2} Qm(t)dt$$

Нека в продължение на периода $t_0 = 0$ до t_n запаса да се попълва n пъти през равни интервали от време $\Delta t_i = t_n / n$ и в момента

$$\begin{aligned} &t_0 = 0 \\ &t_1 = t_n / n; \\ &t_2 = 2t_n / n; \\ &......; \\ &t_{n-1} = (n-1)t_n / n; \\ &t_n . \end{aligned}$$

Ако в момента t_0 са закупени Q_1 елемента, то към момента t_i броят на оставащите неизразходвани РЧ, съгласно (1) ще бъде

(2) $$Q_1 = Q(t_i) = Q_1 = \int_{t1}^{t2} Qm(t)dt$$

Означаваме с S разходите за съхраняване на един елемент за целия период от t_0 до t_n и получаваме, че за времето $\Delta t_i = t_n / n$ разходите за съхраняване на един елемент ще бъдат $\frac{S}{n} = S.\Delta t_i / t_n$ Тогава съгласно (2) разходите за съхраняване на целия обем РЧ за времето от t_0 до t_1 са:

$$\frac{S}{t_n}\int_{t0}^{t1}[Q_1 - Q(t)/nt = \frac{S}{t_n}\left[Q_1(t_1 - t_0) - \int_{t0}^{t1} Q(t)nt\right]$$

Ако в момента t_i всички РЧ са изразходвани, т.е. $Q(t_1) = Q_1$, то закупуваме допълнително количество РЧ $/Q_2 - Q_1/$ и по аналогия разходите за съхраняване за периода $(t_1; t_2)$ ще бъдат:

$$\frac{S}{t_n}\int_{t1}^{t2}[Q_2 - Q(t)/nt = \frac{S}{t_n}\left[Q_2(t_2 - t_1) - \int_{t1}^{t2} Q(t)nt\right]$$

До момента t_2 всички РЧ се изразходват, т.е. $Q(t_2) = Q_2$ и т.н.

От тук разходите за съхранение C_1 за целия период $(0;t_n)$ ще бъдат:

$$C_1 = \frac{S}{t_n}\left[\sum_{i=1}^{n} Q(t_i)(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i} Q(t)dt\right] = \frac{S}{t_n}\left[\sum_{i=1}^{n} Q(t_i)\Delta t_i - \int_{t_0}^{t_i} Q(t)dt\right]$$

Разходите за закупуване на i-тата партида РЧ с обем P_l може да се представи във вида $k + lP_i$, където k са някакви разходи, които не зависят от броя на РЧте. Следователно разходите C_2 за закупуване на частите са:

$$C_2 = k + lQ(t_1) + k + l[Q(t_2) - Q(t_1)] + ... + k + l[Q(t_n) - Q(t_{n-11})] = kn + lQ(t_n)$$

Тогава сумарните разходи C имат вида

$$C = C_1 + C_2 = \frac{S}{t_n}\sum_{i=1}^{n} Q(t_i)\Delta t_i + kn + B = \frac{S}{n}\sum_{i=1}^{n} Q(t_i) + kn + B$$

където $B = lQ(t_n) - \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{t_n}}\int_{t_0}^{t_n} Q(t)dt$

И тъй като $t_0 = 0$ и $t_n = const$, то B е константа, която не зависи от n и за да намерим най – малката стойност на сумарните разходи е достатъчно да изследваме израза:

(3) $$P(n) = \frac{S}{n}\sum_{i=1}^{n} Q(t_i) + kn$$

за екстремум като функция на параметъра n.

При това ще отбележим, че $Q(t_i)$ зависи от n, защото $l_i = l_n \cdot t$. И така, след като намерим търсеното значение на n можем да определим необходимият обем на закупените части по формулите

$$Q_1 = Q[t_n / n];$$
$$Q_2 - Q_1 = Q[2t_n / n] - Q[t_n / n];$$
$$..........;$$
$$Q_n - Q_{n-1} = Q[t_n / n] - Q[(n-1)t_n / n]$$

Приемаме, че функцията има $Q_m(t)$ приема вида

$$Q_m(t) = a + bt + \gamma t^2$$

и съгласно (1) за разхода на частите Q(t) получаваме

$$Q(t) = \int_0^t Qm(t)dt = at + \frac{bt^2}{2} + \frac{\gamma t^3}{3}$$

В съответствие с (3) P_n приема вида

$$P(n) = \frac{S}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(at + \frac{bt^2}{2} + \frac{\gamma t^3}{3}\right) + kn$$

но тъй като $\Delta Q = Q_a / t$, то:

Известно е, че:
Тогава

$$\sum_{i=1}^{n} b = \frac{t(t+1)}{2}; \quad \sum_{i=1}^{n} b^2 = \frac{t(t+1)(2t+1)}{6}; \quad \sum_{i=1}^{n} b^3 = \frac{t^2(t+1)^2}{4};$$

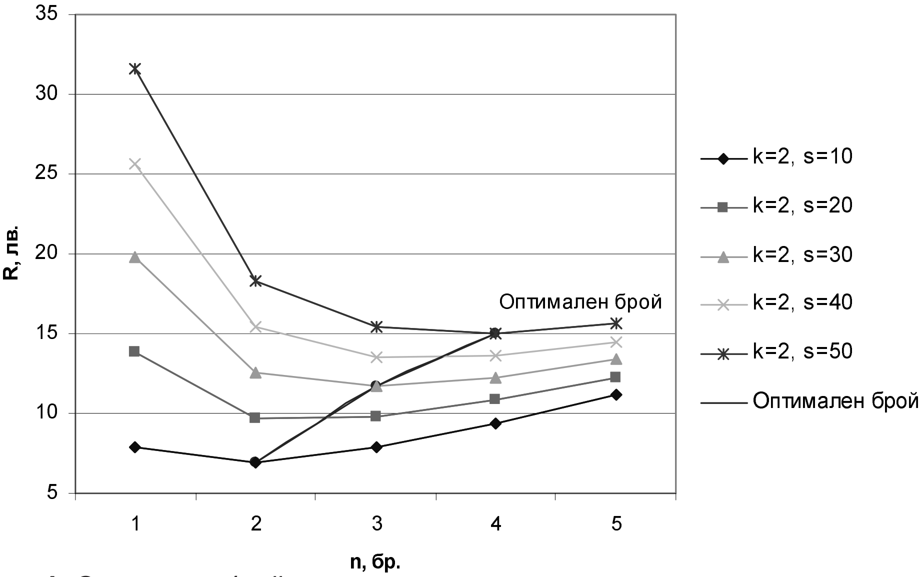
$$P_n = \left(\frac{Q.a_n}{2}\right)\left(m + \frac{da_n}{6}\right) + \left(\frac{Q.a_n}{2b}\right)\left(m + \frac{da_n}{4} + \frac{\gamma a_n^2}{6}\right) + \left(\frac{Q.a_n^2}{32b^2}\right)(d + \gamma a_n) + t\,b$$

но тъй като $t_n = const$, то първото събираемо не зависи от n и е достатъчно да се минимизира израза:

(4) $$R(n) = kn + \frac{l}{n} + \frac{d}{n^2}$$

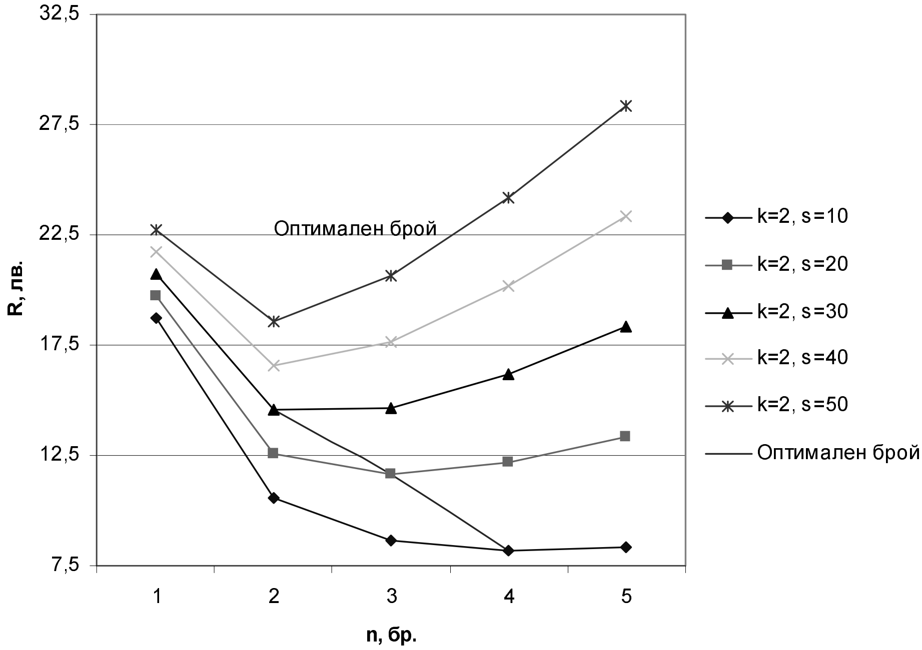
където

$$l = \left(\frac{S.t_n}{2}\right)\left(a + \frac{bt_n}{4} + \frac{\gamma t_n^2}{6}\right) \quad и \quad d = \left(\frac{S.t_n^2}{12}\right)(b + \gamma t_n).$$



Фиг. 1. Оптимален брой поръчки в логистичната система в зависимост от разходите за съхранение (s)

При изследване на израза (4) установихме оптималният брой доставки (n) през периода (t_n) за представените нива на разходите за съхранение (s). Изследването е представено на фиг. 1. При изследване на израза (4), установихме оптималният брой доставки (n) в логистичната система в зависимост от началните разходи (к). Оптималните стойности са представени на фиг. 2.



Фиг. 2. Оптимален брой поръчки в логистичната система в зависимост от началните разходи (к)

Диференцираме (4) и получаваме

$$\frac{dR}{\partial n} = k - \frac{l}{n^2} - \frac{2d}{n^3};$$

(5) $$\frac{d^2R}{\partial n^2} = \frac{2l}{n^3} + \frac{6d}{n^4}.$$

Приравняваме на нула и получаваме кубично уравнение $kn^3 - \ln - 2d = 0$ (5), което лесно решаваме аналитично.

Положителните корени на уравнението (5) съответстват на екстремума на функцията (3). Ако се получи, че n не е цяло число, то го закръгляваме на цяло. Ако функцията има екстремум, то той е минимум. Необходимо е да проверим дали $\frac{d^2R}{\partial n^2} > 0$ и ако това е така, то функцията има решение. За да можем да решим кубичното уравнение (5) полагаме $-l\;0k = p\mathrm{l}\quad -2n\;0k = d$ и тогава уравнението добива вида

(6) $$n^3 + pn + q = 0$$

Уравнението (6) се решава по формулите на Кардано за кубично уравнение. В нашия случай най – удобно е да работим с тригонометричното решение.

В зависимост $Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$ може да се разгледат три случая:

1. При Q<0 и p<0 уравнението(6) се решава по формулите:

$$y_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\alpha}{3},\quad y_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\alpha}{3} \pm \frac{\pi}{3}\right),\quad \textit{където}$$

$$\cos\alpha = -\frac{q}{2\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

2. При $n\ -2\,k\ d = 2($уравнението(6) се решава по следния начин:

$$y_1 = -2\sqrt{\frac{p}{3}}ctg2\alpha,\quad y_{2,3} = \sqrt{\frac{p}{3}}\left(ctg2\alpha \pm i\sqrt{3}\cos ec2\alpha\right);$$

$$tg\alpha = \sqrt[3]{tg\frac{\beta}{2}}\left(|\alpha| \le \frac{\pi}{4}\right),\quad tg\beta = \frac{2}{q}\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3}\left(|\beta| \le \frac{\pi}{2}\right).$$

3. При $n\ -2\,k\ d = 2($уравнението(6) се решава по следния начин:

$$y_1 = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos ec2\alpha,\quad y_{2,3} = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos ec2\alpha \pm i\sqrt{3}ctg2\alpha\right);$$

$$tg\alpha = \sqrt[3]{tg\frac{\beta}{2}}\left(|\alpha| \le \frac{\pi}{4}\right),\quad \sin\beta = \frac{2}{q}\sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3}\left(|\beta| \le \frac{\pi}{2}\right).$$

Уравнението (6) се решава и положителният му корен е търсената стойност на n.

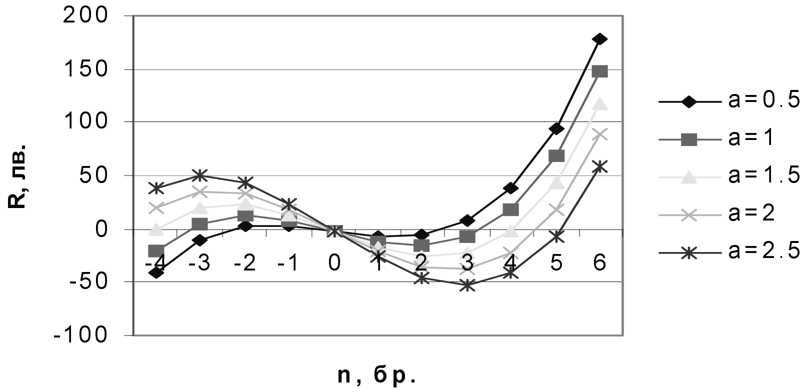
В настоящата разработка ще представя част от проведено изследване на изменението на параметрите: разходите за съхранение (s), началните разходи (к) и функцията на запаса (Q_m). Коефициентите на функцията на запаса (Q_m) са a, b и г.

Моделът е изграден върху минимума на сумарните разходи за закупуване и съхранение на запасите. Проведено е изследване на изменението на сумарните разходи (R_n), в зависимост от параметъра на модела, а именно броя на доставките (n) през периода (t_n).

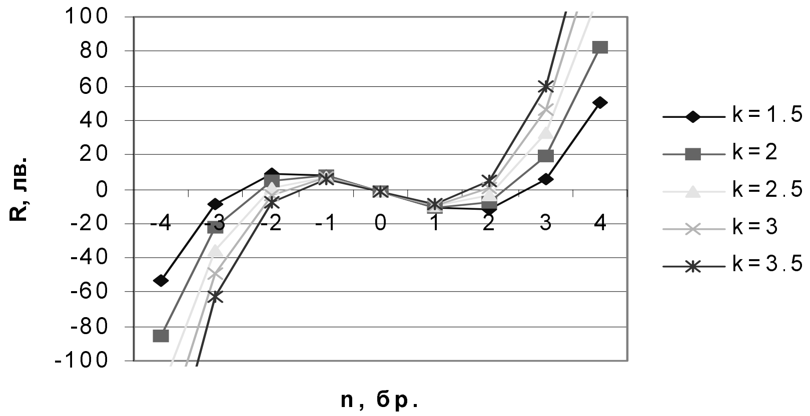
На фиг. 3. е представено изменението на броя на доставките (n) през периода в зависимост от стойностите на коефициента a от функцията на запаса (Q_m). При анализа на резултатите се установи, че с нарастването на a броя на доставките през годината (n) бързо нараства, тоест стойността на коефициента a влияе силно върху параметъра n.

Върху броят на доставките през годината (n) сравнително силно влияят началните разходи (к)(фиг. 4), но влиянието им е по – малко от влиянието на a.

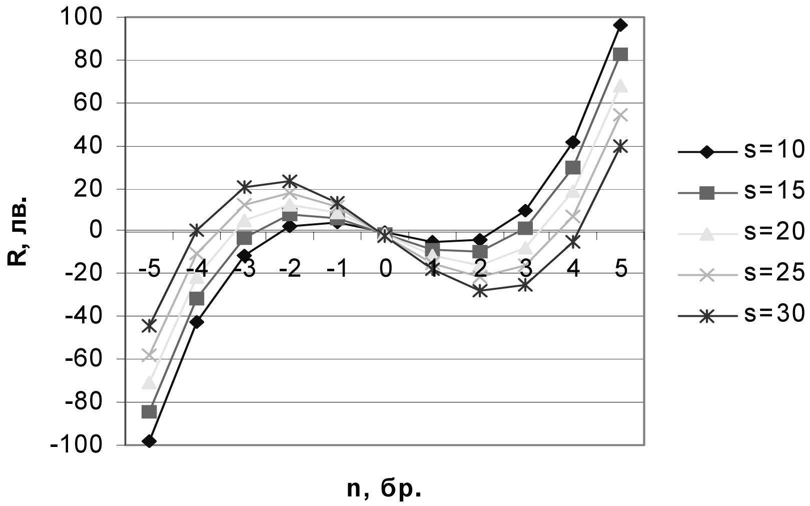
Установи се, че изменението на разходите за съхранение (s)(фиг. 5) оказва голямо влияние върху стойността на n.



Фиг. 3. Изследване на изменението на броя на доставките (n) през периода в зависимост от изменението на а от функцията на запаса (Q_m)



Фиг. 4. Изследване на изменението на броя на доставките (n) през периода в зависимост от изменението на началните разходи (к)



Фиг. 5. Изследване на изменението на броя на доставките (n) през периода в зависимост от изменението на разходите за съхранение (s) на запасите

Изводи:

1. Разработен е математически модел за оптимално управление на запаса от резервни части при неравномерно изразходване на частите в логостичната система.

2. Въз основа на изследването е установено, че най – силно влияние върху броя на доставките оказва коефициента a на функцията на запаса, интензивността на заявките л и разходите за съхранение S.

3. Изследването установи, че с нарастването на разходите за съхранение (s) и на стойността на коефициента a на функцията на запаса броят на доставките (n) расте.

4. Доказа се, че с нарастването на началните разходи (к) броят на доставките (n) намалява.

Литература

1. Довбищук А.Б., И.Н. Омельченко Логостикоориентированное управление запасами продукции в условиях сезонных колебаний спроса Вестник машиностроения, 2000, № 9, с. 50 – 53
2. Михов М., Г. Тасев Вероятностен модел за управление на запасите от обменни елементи – ССТ, 1990, 8, с. 87 – 93.
3. Омельченко И.Н., В.А. Васильев Логостико – ориентированное моделирование систем оперативного планирования Вестник машиностроения, 2001, № 9, с. 61 – 65
4. Сакович В. Модели управления запасами. – Минск, 1986

EXPLORATION AND OPTIMUM MANAGEMENT OF SPARE PARTS STOCK IN AN LOGISTICAL SYSTEM

Svetozar Madjov, Georgi Tasev, Vladislav Todorov
University of Forestry – Sofia, Bulgaria

ABSTRACT

The article treats a model for optimum management of spare parts in logistical system.

This model reports on the fluctuation of the necessities of spare parts. The model explore the dependency between the number of deliveries a year and the total outlay for bay and conservation of spare parts stock and fix the optimal number of deliveries.